



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- α.** Δώστε τους ορισμούς:
- I. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
 - II. Παραβολή με διευθετούσα την ευθεία δ και εστία το σημείο E εκτός της δ .
- β.** Γράψτε τον τύπο της απόστασης του σημείου $M(\chi_0, \psi_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: A\chi + B\psi + \Gamma = 0$
- (3x2 μονάδες)*
- γ.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.
- (9 μονάδες)*
- δ.** Σημειώστε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** για τις προτάσεις:
- I. Η ευθεία με εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-A, -B)$.
 - II. Ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ έχει πάντοτε κέντρο $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$.
 - III. Η απόσταση της εστίας E , της παραβολής $\chi^2 = 2p\psi$, από την διευθετούσα ευθεία δ είναι ίση με $|p|$.
 - IV. Αν E , E' σταθερά σημεία και για το μεταβλητό σημείο M ισχύει $(ME) + (ME') = 2a$, $a > 0$ τότε το M κινείται σε έλλειψη με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$.
 - V. Αν για τα μη παράλληλα στους άξονες x και y διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίστροφοι αριθμοί.
- (5x2 μονάδες)*

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέροντς (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσιοποίησής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση, κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λόσιες τους MONO μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\vec{\gamma} + 3\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta}$.

- a. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=4$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -12$.

(8 μονάδες)

- b. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|=\sqrt{5}$.

(5 μονάδες)

- γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε την τιμή του λ .

(6 μονάδες)

- δ. Για $\lambda=4$ να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι οξεία.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2), η εξίσωση του ύψους ΒΔ: $\chi - 4\psi - 5 = 0$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ: $3\chi + 2\psi + 3 = 0$.

- a. Βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

(6 μονάδες)

- β. Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ και της κορυφής Β.

(7 μονάδες)

- γ. Αν Ε το σημείο τομής των ΓΜ και ΒΔ τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ.

(6 μονάδες)

- δ. Δίνεται η γραμμή (C) με εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 8)y + 3 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή του λ , ώστε ο κύκλος (1) να έχει διάμετρο την πλευρά ΒΓ.

(6 μονάδες)

Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέροντς (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσιοποίησής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση, κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λόσεις τους MONO μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x(y+4) + 12 + 8y = 0$ (1).

- α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι παράλληλες.

(7 μονάδες)

- β. Αν (ε_1): $x+y+2=0$ και (ε_2): $x+y+6=0$ είναι οι δύο ευθείες που παριστάνει η (1), να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία (ε): $y=3x$.

(7 μονάδες)

- γ. Βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε) από τον κύκλο C.

(6 μονάδες)

- δ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (C_1) με εστίες στον άξονα x'x, που έχει ασύμπτωτη την (ε): $y=3x$ και εστιακή απόσταση $2y=10\rho^2$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου C.

(5 μονάδες)



Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέροντς (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσιοποίησής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λόσιες τους MONO μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.